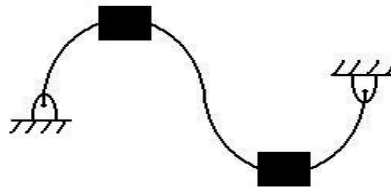


## **ANÁLISE DINÂMICA DE UM EIXO DE TRANSMISSÃO.** Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Álvaro Fernando Gonçalves Crespo, Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo. – Engenharia Mecânica – Departamento de Engenharia Mecânica – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – Campus de Ilha Solteira

Eixos de transmissão ou árvores são utilizados em conjuntos mecânicos para transmitir rotação, torque ou interligar sistemas. Para este fim, normalmente, são fixos a mancais e a eles são acopladas engrenagens, polias, cames e outros mecanismos. Com isso, são usados como base para a construção da maioria das máquinas industriais e sistemas automotivos.

Como são confeccionados de materiais que possuem certa elasticidade como, por exemplo, aços e ligas metálicas, quando submetidos a rotações intensas, sofrem deflexões (figura 1). Devido a isso, é necessário saber previamente quantificar sua reação quando for colocado em situações de trabalho. Um estudo a respeito das suas vibrações é essencial, pois esse comportamento juntamente com altas amplitudes, pode vir a gerar defeitos na estrutura e conseqüentemente redução de sua vida útil ou até mesmo, em alguns casos, o colapso da mesma. Esse movimento vibratório origina-se das excentricidades do eixo em relação ao centro de rotação, provenientes dos processos produtivos do mesmo ou de seus componentes, como engrenagens e polias, sendo que as engrenagens atuam como massas rígidas acopladas. Portanto é necessário estudar a fundo o comportamento vibratório de um conjunto no decorrer do seu projeto, tendo em vista que o movimento do mesmo provém dos componentes girantes dos quais ele é formado.



**Fig. 1** – comportamento vibratório de um eixo de transmissão.

Uma vez que as excentricidades podem somente ser minimizadas e não eliminadas, faz-se necessário estudar quais as faixas de frequências que afetam o sistema, denominadas frequências naturais do conjunto. Assim, se torna necessário determinar estas frequências, através dos autovalores e os modos de vibrar, através dos autovetores e a partir deles, realizar mudanças no projeto do mesmo afim de obter novos números os quais, não serão prejudiciais ao seu funcionamento.

Para tanto é necessário conhecer o comportamento dinâmico dos conjuntos, que pode ser feito por meio de ensaios, protótipos ou elaborando-se modelos matemáticos que os represente. Isto consiste em:

- i. Avaliar as massas e a elasticidade dos elementos envolvidos;
- ii. Avaliar as forças atuantes;
- iii. Construir um modelo a partir de molas, massas ou massas concentradas, amortecedores;
- iv. Estabelecer as equações diferenciais do movimento para o conjunto modelado;
- v. Resolver as equações e interpretar os resultados.

No intuito de realizar a análise dinâmica nesse tipo de equipamento, utilizou-se neste trabalho o eixo de transmissão mostrado pela figura (1). Nesta, estão indicados os valores de rigidez de cada parcela do eixo, a inércia das polias e seus respectivos graus de liberdade.

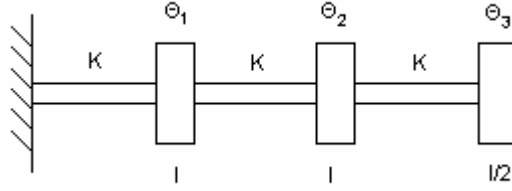


Fig. (2) – eixo de transmissão de torque.

Afim de obter as frequências naturais do modelo, o primeiro passo foi quantificar os parâmetros inércia  $I$  e rigidez  $K$ , levando em conta os graus de liberdade da estrutura, envolvidos na equação (1) chamada, equação do movimento angular. Vale salientar, que os efeitos de amortecimento foi desconsiderado neste equacionamento.

$$[I]\ddot{\theta}(t) + [K]\theta(t) = 0 \quad (1)$$

Deste modo, para obter as matrizes  $[I]$  e  $[K]$ , usou-se o método da energia através das equações de Lagrange (2) para sistemas sem amortecimento.

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right] + \frac{\partial U}{\partial q} = 0 \quad (2)$$

Na qual  $T$  é a energia cinética, equação (3),  $U$  a energia potencial, equação (4), e  $q$  as coordenadas generalizadas de cada grau de liberdade.

$$T = \frac{I \cdot \dot{\theta}(t)^2}{2} \quad (3)$$

$$U = \frac{K \cdot \theta(t)^2}{2} \quad (4)$$

Somando as energias cinéticas e potenciais, relativas a rigidez das parcelas do eixo, chegou-se a uma  $T_{total}$  (5) e  $U_{total}$  (6).

$$T_{total} = \frac{I \cdot \dot{\theta}_1(t)^2}{2} + \frac{I \cdot \dot{\theta}_2(t)^2}{2} + \frac{I \cdot \dot{\theta}_3(t)^2}{4} \quad (5)$$

$$U_{total} = \frac{K \cdot \theta_1(t)^2}{2} + \frac{K \cdot (\theta_2(t) - \theta_1(t))^2}{2} + \frac{K \cdot (\theta_3(t) - \theta_2(t))^2}{2} \quad (6)$$

Utilizando a equação (2), encontrou-se a equação de movimento angular (1) para cada grau de liberdade, ou seja, para  $\mathbf{q}$  igual à  $\theta_1$  (7),  $\theta_2$  (8) e  $\theta_3$  (9) respectivamente.

$$I.\ddot{\theta}_1(t) + 2.K.\theta_1(t) - K.\theta_2(t) = 0 \quad (7)$$

$$I.\ddot{\theta}_2(t) + 2.K.\theta_2(t) - K.\theta_1(t) - K.\theta_3(t) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{I}{2}.\ddot{\theta}_3(t) + K.\theta_3(t) - K.\theta_2(t) = 0 \quad (9)$$

Finalmente, estruturou-se a equação (1) na forma matricial (10) afim de obter as matrizes de inércia  $[\mathbf{I}]$  (11) e rigidez  $[\mathbf{K}]$  (12) da figura (2).

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & -K & 0 \\ -K & 2K & -K \\ 0 & -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Tendo em mãos as matrizes (11) e (12), iniciou-se efetivamente os cálculos das frequências naturais. Para tal, uma matriz dita dinâmica  $[\mathbf{A}]$  (13), determinada a partir da equação (10), quando se utiliza espaços de estado foi confeccionada para o modelo.

$$A = \begin{bmatrix} \text{zeros}(gdl) & \text{eye}(gdl) \\ -\text{inv}[I].K & -\text{inv}[I].C \end{bmatrix} \quad (13)$$

Sendo que **zeros(gdl)** é uma matriz quadrada de zeros com dimensão igual ao número de graus de liberdade, (gdl), do modelo, no caso 3, **eye(gdl)** se trata de uma matriz identidade com dimensão igual a gdl e **inv[I]**, é a matriz inversa da matriz de inércia. Como já dito anteriormente, neste trabalho o amortecimento do eixo foi desprezado por isso, no lugar de **-inv[I].C**, colocou-se uma matriz **zeros(gdl)**. A partir da equação (13), com uma rotina em MAT LAB®, calculou-se os autovalores, estes, obtidos na forma de uma matriz. Por fim, as frequências dos três primeiros modos de vibrar foram encontradas calculando a norma, ou seja, a sua raiz quadrada, de cada valor da diagonal principal dessa matriz. Deste modo, a tabela (1) mostra os resultados obtidos.

<b>Modos de Vibirar</b>	<b>1°</b>	<b>2°</b>	<b>3°</b>
<b>Frequências naturais (rad/s)</b>	0,7321	2,0000	2,7321

**Tab. (1)** – frequências naturais obtidas.

A intenção deste trabalho foi mostrar uma alternativa, de boa eficácia, para simular eixos de transmissão através da modelagem dinâmica. Através desta análise podem-se evitar problemas de ressonância com a determinação das frequências naturais do sistema.

### **Referências Bibliográficas**

**LALLANE, M.; BERTHIER, P.; HAGOPIAN, J.D.**, Mechanical Vibration for Engineers. Chichester, New York. John Wilegrandsons, 1998.

**TADEU, M. D.A.**, Vibrações Mecânicas para engenheiros. São Paulo, Editota Edgard Blücher Ltda. 1987.

**HALL, A. S. J.; HOLOWENKO, A. R.; LAUGHLIN, H. G.**, Elementos Orgânicos de Máquinas. São Paulo, McGrawn-Hill, 1977.